ПРИКЛАДНА ГЕОМЕТРІЯ, ІНЖЕНЕРНА ГРАФІКА ТА ЕРГОНОМІКА

УДК 514.18
DOI https://doi.org/10.32838/2663-5941/2021.6/01

Устенко І.В.
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова

Устенко А.С.
Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова

НОВИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ АПОЛЛОНІЯ

Стаття присвячена розробці методу розв'язання задачі Аполлонія Пергського, пов'язаної з побудовою кола, дотичного до трьох довільно заданих кіл. Аполлоній показав, що можливими є вісім варіантів розв'язку задачі, які обумовлені внутрішніми, зовнішніми та змішаними спряженнями трьох вихідних кіл. Ці задачі розв'язані Аполлонієм із застосуванням лінійки та циркуля, але, на жаль, ці розв'язки до нашого часу не дійшли. У статті задача Аполлонія розв'язується на базі сучасних знань з інженерної графіки, аналітичної та обчислювальної геометрії, чисельних методів із застосуванням комп'ютерної техніки. Задача розв'язується так. Будується коло довільного радіуса навколо двох заданих кіл. Визначаються координати двох точок, які є центрами кіл спряження. Складається рівняння прямої, яка з'єднує два отримані центри. Далі аналогічні дії виконуються з іншою парою заданих кіл, які спрягаються колом того ж радіуса, що й у попередній парі кіл. Сумісним розв'язанням рівнянь двох прямих знаходяться координати точки їх перетину. Для визначення радіуса допоміжного кола, що забезпечує торкання трьох кіл, складається нелінійне рівняння, яке враховує тип спряження. Методом дихотомії уточнюється величина радіуса кола, яке торкається трьох заданих кіл. Запропонований метод розв'язання задачі Аполлонія реалізовано у вигляді комп'ютерного коду, який дає змогу, окрім числових результатів, отримувати графічні зображення розв'язків задачі на екрані монітора комп'ютера. Наведені приклади розв'язання трьох задач Аполлонія відповідають трьом варіантам спряження: внутрішньому, зовнішньому та змішаному. Решта варіантів задачі Аполлонія розв'язується аналогічним чином.

Ключові слова: *задача Аполлонія, коло, торкання кіл, спряження, чисельний метод, комп'ютерна реалізація.*

Постановка проблеми. Аполлоній Пергський (бл. 262–170 до н. е.) є одним із найвидатніших давньогрецьких математиків, який запропонував і розв'язав за допомогою циркуля та лінійки багато цікавих геометричних задач, пов'язаних із точкою, прямою і колом. Узагалі коло було його найулюбленішим геометричним образом. Однією із задач, пов'язаних із цим геометричним образом, є побудова кола, яке торкається трьох заданих, довільно розташованих кіл. На жаль, рішення цієї задачі самим Аполлонієм не збереглося. Але ця задача приваблювала багатьох геометрів різних років життя. Це зробило її дуже популярною. Розв'яжемо цю задачу з позицій сучасних знань математики, зокрема чисельних методів, обчислювальної геометрії та, зрозуміло, наявності комп'ютерної техніки, яка не тільки суттєво прискорює виконання розрахунків з високою точністю, а й дає змогу візуалізовувати результати розв'язків на дисплеї.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задачі, запропоновані Аполлоном Пергським, і до сих пір цікавлять сучасних дослідників. Особлива увага приділяється розв'язанню задачі, пов'язаної з побудовою кола, дотичного до трьох заданих кіл. У всесвітній мережі Інтернет можна знайти різноманітні розв'язки цієї задачі, які в більшості випадків виконувалися графічним способом. Так, у роботі [1] задачу Аполлонія пропонується розв'язувати методом інверсії. Співзвучною із цією роботою є праці [3], у якій також пропонується розв'язувати задачу Аполлонія методом інверсії.

Цікавою є робота [2], у якій кола Аполлонія розглядаються в дещо іншій постановці, а саме вписування кіл у проміжки між іншими, раніше побудованими колами. Графічне розв'язання задачі Аполлонія пропонується в праці [5]. Історичні й обчислювальні аспекти, пов'язані із задачами Аполлонія, викладені в роботі [5].

Постановка завдання. Метою роботи є розв'язання відомої старовинної геометричної задачі, запропонованої Аполлонієм і пов'язаної з побудовою кола, дотичного до трьох довільно розташованих кіл, із застосуванням методів інженерної графіки, аналітичної геометрії та чисельних методів і комп'ютерної графіки без проведення побудов, які використовуються при графічному розв'язанні розглянутої задачі.

Виклад основного матеріалу дослідження. Аполлоній показав, що поставлена ним задача побудови кола, яке торкається трьох заданих кіл, має вісім варіантів розв'язків. Схематично ці розв'язки показні на рис. 1.

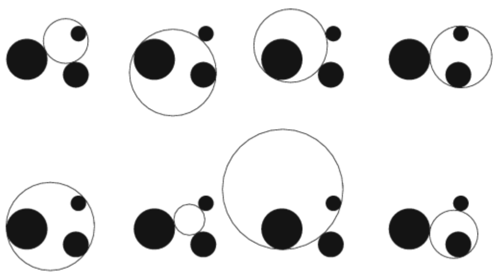

Рис. 1. Приклади розв'язків задачі Аполлонія

Розглянемо розв'язання однієї із задач Аполлонія, оскільки підхід до їх розв'язку однаковий.

Нехай задані три різного радіуса довільно розташовані кола (рис. 2).

Необхідно побудувати коло за умови, що воно буде дотичним до цих трьох кіл, а самі кола мають знаходитися всередині шуканого кола.

Розглянемо дві пари кіл O_1 і O_2 та O_1 і O_3. Розв'яжемо для цих двох пар кіл задачу внутрішнього спряження. Для цього побудуємо допоміжні кола радіусом, який дорівнює різниці радіуса R дуги спряження та радіусів заданих вихідних кіл. Координати центра дуги спряження можна знайти розв'язанням двох рівнянь другого степеня, якими описуються два допоміжних кола. Але цю задачу краще розв'язувати іншим способом, який не передбачає застосування двох квадратичних рівнянь.

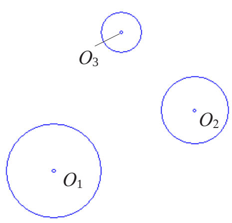

Рис. 2. Вихідні кола

На рис. 3 показані два перетинних, довільно розташованих кола. Треба знайти координати точок O_3 і O_4 їх перетину.

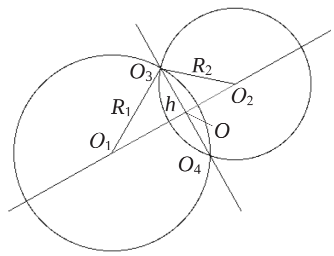

Рис. 3. Визначення точок перетину двох кіл

Позначимо відрізок O_1O літерою a, відрізок OO_2 літерою b. Літерою h позначимо відстань від точки O_3 перетину розглядуваних кіл до прямої O_1O_2. Розглядаючи два прямокутні трикутники O_1OO_3 і O_2OO_3, можемо записати два таких рівняння:

$$a^2 + h^2 = R_1^2 \text{ і } b^2 + h^2 = R_2^2.$$

Приймаючи $d = a + b$, після перетворень отримуємо вираз для розрахунку a:

$$a = \frac{R_1^2 - R_2^2 + d^2}{2d}.$$

Маючи a, визначаємо h:

$$h^2 = R_1^2 - a^2.$$

Розраховуємо координати точки O за такими виразами:

$$x_O = x_{O_1} + a\left(x_{O_2} - x_{O_1}\right)/d;$$
$$y_O = y_{O_1} + a\left(y_{O_2} - y_{O_1}\right)/d.$$

І, нарешті, визначаємо координати точок O_3 і O_4 перетину двох кіл:

$$x_{O_3} = x_O - h\left(y_{O_2} - y_{O_1}\right)/d;$$
$$y_{O_3} = y_O + h\left(x_{O_2} - x_{O_1}\right)/d; \quad (1)$$

$$x_{O_4} = x_O + h\left(y_{O_2} - y_{O_1}\right)/d;$$
$$y_{O_4} = y_O - h\left(x_{O_2} - x_{O_1}\right)/d. \quad (2)$$

Таким чином, знайдено вирази для розрахунку координат точок перетину двох довільно розташованих кіл без сумісного розв'язання рівнянь другого степеня. Надалі для зовнішнього спряження під R_1 і R_2 будуть розумітися суми радіусів кіл, що спрягаються, дугою радіуса R. Для внутрішнього спряження радіус R віднімається.

На рис. 4 показані два допоміжні кола для спряження кіл із центрами в точках O_1 і O_2 колом довільного радіуса R. За допомогою виразів (1) і (2) знаходимо координати двох точок A_1 і A_2 перетину допоміжних кіл, які з'єднані відрізком прямої лінії.

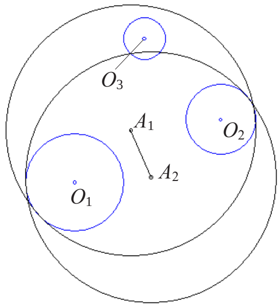

Рис. 4. Внутрішнє спряження кіл з центрами O_1 і O_2 дугою довільного радіуса R

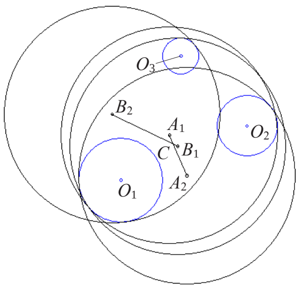

Рис. 5. Внутрішнє спряження кіл із центрами O_1 і O_3 дугою довільного радіуса R

Аналогічні дії виконуємо для пари кіл із центрами в точках O_1 і O_3. На рис. 5, який можна вважати продовженням рис. 4, побудовано відрізок B_1 і B_2, подібний відрізку A_1A_2.

Відрізки A_1A_2 і B_1B_2 перетинаються в точці C. Особливістю точки C є те, що вона дає змогу здійснити внутрішнє спряження кіл із центрами в точках O_1 і O_2 та в точках O_1 і O_3 колом радіуса R. Але цей радіус узято довільно.

Отже, необхідно організувати обчислювальний процес для визначення такої величини радіуса R, щоб коло, побудоване цим радіусом, було дотичним до трьох вихідних кіл. Зазначимо, що з геометричних міркувань величина радіуса кола спряження для першого кола має дорівнювати сумі радіуса кола R_1 і відрізку O_1C, а для другого кола – сумі радіуса кола R_2 і відрізку O_2C. Базуючись на цьому, можна скласти таке нелінійне рівняння:

$$f = R - R_1 - \sqrt{\left(x_{O_1} - x_C\right)^2 + \left(y_{O_1} - y_C\right)^2}.$$

Координати точки C визначаються шляхом сумісного розв'язання рівнянь двох прямих, які проходять через точки A_1, A_2 і B_1, B_2.

На розв'язання задачі витрачено п'ять ітерацій. Похибка розрахунків становила 8,958006E-06.

Остаточний розв'язок поставленої задачі спряження трьох вихідних кіл колом, яке є дотичним до них, наведено на рис. 6. На рисунку також показано центр кола C, яке охоплює три вихідні кола.

Аполлонієм також розглядався випадок, коли результуюче коло «вписано» в область, обмежену трьома вихідними колами. Цей випадок розв'язується аналогічно попередньому. Різниця в тому, що тепер коло, яке вписується, для двох пар вихідних кіл розглядається як коло зовнішнього спряження. У зв'язку з цим у розробленому програмному коді у відповідних місцях треба відповідний арифметичний знак замінити на протилежний.

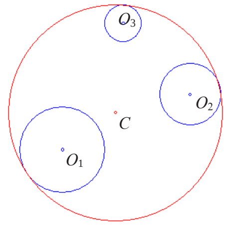

Рис. 6. Коло, яке охоплює три вихідних кола

Остаточний розв'язок другої задачі Аполлонія показано на рис. 7. З розгляду цього рисунку чітко видно, що результуюче коло торкається трьох вихідних кіл. Це візуально підтверджує розв'язання поставленої задачі. Нагадаємо, що Аполлоній розв'язував їх за допомогою циркуля та лінійки.

На рис. 8 показано зведений результат розв'язання поставленої задачі Аполлонія. Це є підтвердженням того факту, що вихідні кола свого положення не змінювали, тобто не підправлялися для розв'язання першої, а потім другої задачі Аполлонія. До речі, чітко закріпленої нумерації задач Аполлонія не існує. У різних джерелах вони мають різну нумерацію.

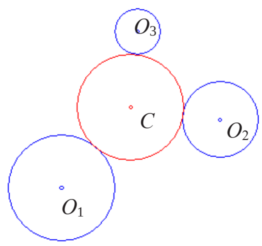

Рис. 7. Коло, розташоване між трьома вихідними колами

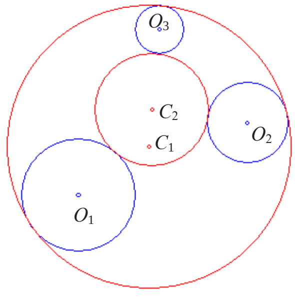

Рис. 8. Зображення розв'язків двох задач Аполлонія

Вище вказувалося, що всього існує вісім подібних задач. У зв'язку з обмеженим об'ємом роботи не має можливості показувати розв'язки всіх задач Аполлонія, тим паче що вони розв'язуються аналогічно. Але все ж таки покажемо результат розв'язку ще однієї задачі, оскільки в ній з точки зору геометричного креслення застосовується змішане спряження (рис. 9). У попередніх двох задачах застосовувався підхід, який базувався на внутрішньому та зовнішньому спряженнях.

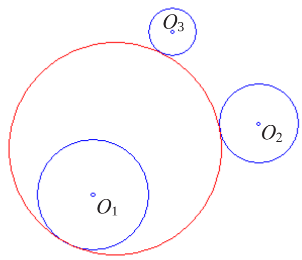

Рис. 9. Змішане спряження трьох вихідних кіл

З розгляду рис. 9 випливає, що варіант змішаного спряження вихідних кіл також реалізовано.

Висновки. Запропонований метод розв'язання задачі Аполлонія, пов'язаної з побудовою кіл дотичних до трьох довільно розташованих кіл, із застосуванням методів інженерної графіки, аналітичної геометрії та чисельних методів і комп'ютерної графіки є працездатним. Він дає змогу будувати та візуалізовувати на дисплеї комп'ютера будь-який із восьми можливих варіантів розв'язків, передбачених Аполлонієм, за умови, що центри трьох вихідних кіл не знаходяться на одній прямій лінії.

Список літератури:

1. Аргунов Б.И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости. Москва : Учпедгиз, 1957. 268 с.
2. Apollonian circle packings: number theory / R.L. Graham, J.C. Lagarias, C.L. Mallows, A.R. Wilks, C.H. Yan. *Journal of Number Theory.* 2003. № 100. P. 1–45.
3. Bruen A., Fisher J.C., Wilker J.B. Apollonius by Inversion. *Mathematics Magazine.* 1983. № 56 (2). P. 97–103.
4. Coxeter H.S.M. The problem of Apollonius. Amer. Math. Monthly 75 (1968) 5–15. Reprinted in the Canad. Math. Bull. 11 (1968) 1–17.
5. Gisch D., Ribando J.M. Apollonius' Problem: A Study of Solutions and Their Connections (англ.). *American Journal of Undergraduate Research: journal.* 2004. Vol. 3. P. 15–25.
6. Santos S.A., Travisan A.L. O problema de Apolônio: aspectos históricos e computacionais. URL: http://www.ime.unicamp.br/rel_pesq/ 2004/ps/rp32-04.pdf.

Ustenko I.V., Ustenko A.S. A NEW APPROACH TO SOLVING THE APOLLONIAN PROBLEM

The article is devoted to the development of a method for solving the problem of Apollonius of Perga, related to the construction of a circle tangent to three arbitrarily given circles. Apollonius showed that there are eight possible solutions to the problem, which are due to internal, external and mixed conjugations of three given circles. These problems were solved by Apollonius using a ruler and a compass, but, unfortunately, these solutions have not survived. In the proposed article, the Apollonian problem is solved on the basis of modern knowledge of engineering graphics, analytical and computational geometry, numerical methods and the use of computer technology. The problem is solved as follows. A circle of arbitrary radius is constructed around two given circles. The coordinates of two points, which are the centers of the circles of conjugation, are determined. The equation of the line connecting the two resulting centers is formed. Then similar actions are performed with another pair of given circles, which are conjugated by a circle of the same radius as in the previous pair of circles. The coordinates of the point of their intersection are the joint solution of the equations of the two lines. To determine the radius of the auxiliary circle, which ensures the contact of three circles, a nonlinear equation is formed, which takes into account the type of conjugation. The dichotomy method specifies the magnitude of the radius of a circle that touches three given circles. The proposed method of solving the Apollonian problem is implemented in the form of computer code, which allows, in addition to numerical results, to obtain graphical images of solutions of the problem on the computer monitor screen. The following are examples of solving three Apollonius' problems, which correspond to three conjugation options: internal, external, and mixed. The rest of the Apollonian problem is solved in a similar way.

Key words: *Apollonian problem, circle, touching circles, conjugation, numerical method, computer implementation.*